

Somma di sottospazi e somma diretta.

$U+W$ è diretta $\Leftrightarrow$ ogni vettore di $U+W$ si scrive in modo unico come somma di $\bar{u} \in U$ e $\bar{w} \in W$.

$$\forall \bar{x} \in U+W \exists! (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W: \bar{x} = \bar{u} + \bar{w}.$$

$$\text{Teorema: } U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$$

DM: Sia $U \oplus W$ e supponiamo $\bar{x} \in U \cap W$

$$\Rightarrow \forall \bar{u} + \bar{w} \in U+W \text{ con } \bar{u} \in U, \bar{w} \in W$$

$$\bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x}) \Rightarrow \begin{matrix} \bar{u} = \bar{u} + \bar{x} \\ \bar{w} = \bar{w} - \bar{x} \end{matrix} \Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}.$$

Viceversa $U \cap W = \{\underline{0}\}$ e supponiamo per assurdo

$\exists \bar{x} \in M+W$ con $\bar{x} = \bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}'$ con $\bar{u}, \bar{u}' \in M$
 $\bar{w}, \bar{w}' \in W$

$$\Rightarrow \bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u} - \bar{u}' = \bar{w}' - \bar{w} \Rightarrow \bar{u} - \bar{u}' \in \{0\} = M \cap W$$

$$\in M \quad \in W$$

$$\bar{w}' - \bar{w} \in \{0\} = M \cap W$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{u}' \text{ e } \bar{w} = \bar{w}' \Rightarrow M \oplus W \quad \square$$

oss: Siano M, W due sottospazi su K

$\Rightarrow M \times W$ con le operazioni

$$(\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{u}', \bar{w}') := (\bar{u} + \bar{u}', \bar{w} + \bar{w}')$$

$$\alpha \cdot (\bar{u}, \bar{w}) = (\alpha \bar{u}, \alpha \bar{w}).$$

è uno spazio vettoriale su K .

Consideriamo la funzione

$$\Pi: \mathcal{M} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{M} + \mathcal{W} \\ (\bar{u}, \bar{w}) \rightarrow \bar{u} + \bar{w} \quad \text{è suriettiva}$$

DIRE CHE LA SOMMA È BIRETTA EQUIVALE A DIRE
 Π è iniettiva.

Π è una funzione lineare.

Verifica

$$\begin{aligned} \Pi (\alpha (\bar{u}, \bar{w}) + \beta (\bar{u}', \bar{w}')) &= \\ &= \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}' + \alpha \bar{w} + \beta \bar{w}' = \Pi (\alpha \bar{u}, \alpha \bar{w}) + \Pi (\beta \bar{u}', \beta \bar{w}'). \end{aligned}$$

Teorema: Siano X e Y due sp. vettoriali su

K e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione lineare.

Poniamo $\text{Ker } f := \{ \bar{x} \in X : f(\bar{x}) = 0 \} \subseteq X$

Allora

1) $\text{Ker } f \leq X$

2) f è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

Dim:

1) Siano $\alpha, \beta \in K$, $\bar{x}, \bar{y} \in \text{Ker } f \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \\ \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \text{Ker } f.$$

2) $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\})$. Se $\text{Ker } f \neq \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \neq \underline{0}$ con $\bar{x} \in \ker f$ e $f(\bar{x}) = f(\underline{0}) = \underline{0}$
quindi f non è iniettiva.

Supponiamo $\ker f = \{ \underline{0} \}$ e che $\exists \bar{x}, \bar{y} \in X$
con $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ allora $\Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \underline{0}$
 $\Rightarrow f(\bar{x} - \bar{y}) = \underline{0} \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in \ker f = \{ \underline{0} \}$.
 $\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$. Ne segue f iniettiva $\square$

Sia $f: X \rightarrow Y$ lineare e sia $\bar{x} \in X$

$$\Rightarrow \text{Basta } f(\bar{x}') = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x}' \in \bar{x} + \ker f = \\ = \{ \bar{x} + \bar{t} \mid \bar{t} \in \ker f \}.$$

DIM: $\bar{x}' \in \bar{x} + \ker f \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + \bar{t}$ con $\bar{t} \in \ker f \Rightarrow f(\bar{x}') = f(\bar{x} + \bar{t}) =$

$$= f(\bar{x}) + f(\bar{t}) = f(\bar{x}) + f(\bar{0}) = f(\bar{x}).$$

$$\text{Supposons } f(\bar{x}') = f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}') - f(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{x}' - \bar{x} \in \text{Ker } f \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + \bar{t} \text{ avec } \bar{t} \in \text{Ker } f$$

quand

$$\begin{aligned} \pi: U \times V &\rightarrow U+V \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\rightarrow \bar{u} + \bar{v} \end{aligned}$$

est injective.

$$\text{or } \text{Ker}(\pi) = \{ \bar{0} \} = \{ (0, 0) \}.$$

$$\text{Ker } \pi = \{ (\bar{u}, \bar{v}) : \bar{u} + \bar{v} = \bar{0} \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) : \bar{u} \in U, -\bar{u} \in V \} =$$

$$= \{(\bar{x}, -\bar{x}) : \bar{x} \in U \cap W\}.$$

$$\ker \pi = \{(0, 0)\} \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}.$$

Segue che se $\ker \pi = \{(0, 0)\}$ cioè $U \cap W = \{0\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \pi$ é um isomorfismo.

$$\boxed{U \times W \cong U \oplus W}$$

Oss: Siamo X, W, Y due $\mathbb{K}$ -vettoriali su $\mathbb{K}$ e

$f: X \rightarrow Y$ una applicazione lineare.

Se $\ker f = \{0\} \Rightarrow f$ manda sequenze libere di X
 in sequenze libere di Y .

In particolare f manda
BASI di X in BASI di
 $\text{Im}(f) \leq Y$.

DIM: Supponiamo $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ seq. libero di X

$$\Rightarrow f(a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_m \bar{a}_m) = \left. \begin{aligned} &= a_1 f(\bar{a}_1) + \dots + a_m f(\bar{a}_m). \end{aligned} \right] (*)$$

ossia Supponiamo a $f(\bar{a}_1) \dots f(\bar{a}_m)$

esista $\Rightarrow \exists a_1 \dots a_m$ tali che

$$a_1 f(\bar{a}_1) + \dots + a_m f(\bar{a}_m) = \underline{0} \quad e$$

$$(a_1 \dots a_m) \neq (0 \dots 0). \Rightarrow$$

$$f(a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_m \bar{a}_m) = \underline{0} \Rightarrow a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_m \bar{a}_m \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_m \bar{a}_m = 0 \quad \text{perché } \ker f = \{0\}.$$

Y perché $(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ libera e $(a_1 \dots a_m) \neq (0 \dots 0)$ $\square$

CONCLUSIONE:

Se $f: X \rightarrow Y$ ^{lineare} $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow$

$$\dim X = \dim \operatorname{Im}(f)$$

in particolare $X \cong \operatorname{Im}(f).$

oss. Se $X \cong Y \Rightarrow \dim X = \dim Y.$ $\dim X < \infty.$

Viceversa: siano X $\left| \dim X = \dim Y \Rightarrow X \cong Y \right|$

$B_X = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ base di X

pongo $f(\bar{x}_i) := \bar{y}_i$

$B_Y = (\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n)$ base di Y

estendo f per linearità.

$$\begin{aligned} f(a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n) &= a_1 f(\bar{x}_1) + \dots + a_n f(\bar{x}_n) = \\ &= a_1 \bar{y}_1 + \dots + a_n \bar{y}_n \end{aligned}$$

Per $f = \{0\} \Rightarrow f$ lineare
e suriettiva perché $\exists y$ di grado 1 . $\square$

$$|K^n$$

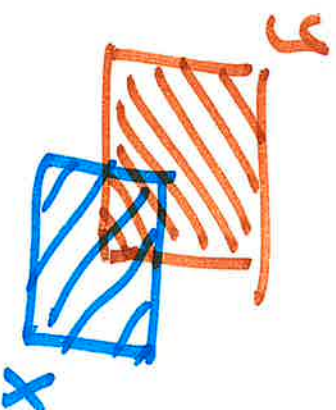
$$\begin{aligned} \dim(X \oplus Y) &= \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y. \\ &= \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) \end{aligned}$$

$$X \cap Y = \{0\}.$$

$$\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim Y - \dim X \cap Y$$

Formula di Grassmann.

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$



$$\pi: X \times Y \rightarrow X + Y.$$

$$\dim(X+Y) = \underline{\dim \operatorname{Im}(\pi)}$$

$$\dim(X) + \dim(Y) = \dim(X \times Y) = \underline{\dim \operatorname{Dom}(\pi)}$$

$$\dim(X \cap Y) = \underline{\dim \operatorname{Ker}(\pi)}.$$

$$\dim \operatorname{Dom}(\pi) = \dim \operatorname{Im}(\pi) + \dim \operatorname{Ker}(\pi).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{rank}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{nullity}}$

Teorema (nullità + rango).

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

$\dim V < \infty$

Si dice $\text{rk}(f) = \text{rango di } f = \dim \text{Im}(f)$

$\text{null}(f) = \text{nullità di } f = \dim \text{Ker}(f)$.

Teo 5: $\boxed{\dim(V) = \text{rk}(f) + \text{null}(f)}$

Dim: Sia $B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una base di V

$\Rightarrow f(\bar{b}_1) \dots f(\bar{b}_n)$ generano $\text{Im}(f)$

Se $\text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow f(\bar{b}_1) \dots f(\bar{b}_n)$ liberi $\Rightarrow$

$$\dim(V) = \dim \text{Im}(f) + \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_0$$

□

Altrimenti $\ker f \leq V$ e $\ker f$ ammette una base $\{ (\bar{k}_2 \dots \bar{k}_m) \mid m \leq n$

completiemo $(\bar{k}_2 \dots \bar{k}_m \bar{b}_2 \dots \bar{b}_{n-m})$ a base di V .

oss: Il sottospazio $\text{Im}(f)$ è generato dai soli vettori $f(\bar{b}_2) \dots f(\bar{b}_{n-m})$

$$\underbrace{f(\bar{k}_2) \dots f(\bar{k}_m)}_{\underline{0}} \quad f(\bar{b}_2) \dots f(\bar{b}_{n-m}).$$

Di più $f(\bar{b}_2) \dots f(\bar{b}_{n-m})$ è libera.

Se fosse libera $\Rightarrow \exists (\beta_2 \dots \beta_{n-m}) \neq (0 \dots 0)$

$$\beta_2 f(\bar{b}_2) + \dots + \beta_{n-m} f(\bar{b}_{n-m}) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_{n-m} \bar{b}_{n-m}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_{n-m} \bar{b}_{n-m} \in \ker f = \mathcal{L}(\bar{k}_2 \dots \bar{k}_m)$$

perché $\bar{b}_2 \dots \bar{b}_{n-m} \neq 0$ linear $\Rightarrow \mathcal{L}$

perché avremo $\exists \alpha_2 \dots \alpha_m :$

$$\alpha_2 \bar{k}_2 + \dots + \alpha_m \bar{k}_m = \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_{n-m} \bar{b}_{n-m}$$

con $(\bar{k}_2 \dots \bar{k}_m \bar{b}_2 \dots \bar{b}_{n-m})$ base e

$$(\alpha_2 \dots \alpha_m, -\beta_2 \dots -\beta_{n-m}) \neq (0 \dots 0).$$

□

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n - m = \dim V - \dim \ker f.$$

CONSEGUEZZA: GRASSMAN.

$f: V \rightarrow W$ lineare. ($\dim V < \infty$).

$$f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in V.$$

$$\text{Ker } f := \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{0}_f = f^{-1}(\bar{0}) \} \leq V$$

$B = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ base di $V \Rightarrow (f(\bar{v}_2) \dots f(\bar{v}_n))$ di generatori per $\text{Im } f \leq W$.
(eq. d. span).

$A = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_k)$ libera in V & $\text{Ker } f = \{ \bar{0}_f \} \Rightarrow (f(\bar{v}_2) \dots f(\bar{v}_k))$ libera.

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V: f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{y} \in \bar{x} + \text{Ker } f.$$

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{ \bar{0}_f \}.$$

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f. \quad (\text{nullity} + \text{rank})$$

N.B. f è univocamente determinata da

- essere lineare
- i valori che assume su di una base B di V .

$\mathcal{O}_3 = \text{base di } V.$

$$\mathcal{O}_3 := (\bar{e}_2 \dots \bar{e}_n) \Rightarrow \forall \bar{v} \in V \exists (a_2 \dots a_n) \in K^n:$$

$$\bar{v} = a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n) =$$

$$= a_2 \underbrace{f(\bar{e}_2)} + \dots + a_n \underbrace{f(\bar{e}_n)}$$

$$\dim(M+W) = \dim M + \dim W - \dim(M \cap W).$$

$$\text{se } M \cap W = \{0\} \Rightarrow \text{F.U.E.} \quad \dim(M+W) = \dim M + \dim W.$$

altrimenti sia $\mathcal{O}_3 = (\bar{e}_2 \dots \bar{e}_i)$ una base di $M \cap W$



$U+W$

$\dim W = m$
 $\dim U = n$

BASE DI $W = m$ vettori

BASE DI U
 $= n$ vettori



$\dim U + \dim W - \dim U \cap W$

Since the req. is union of two base di U e di W $\Rightarrow$ una genera $U+W$.

Supponiamo $(\bar{u}_{n-i} \dots \bar{u}_1 \underbrace{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{m-i}}_{\text{legato}})$ ed arriviamo ad un assurdo.

$$\alpha_{m-i} \bar{u}_{n-i} + \dots + \alpha_1 \bar{u}_1 + \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{m-i} \bar{w}_{m-i} = \underline{0}$$

$$\text{con } (\alpha_{n-i} \dots \alpha_1 \underbrace{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_i \gamma_1 \dots \gamma_{m-i}}_{\text{}}) \neq \underline{0}.$$

$(\alpha_{n-i} \dots \alpha_1) = (0 \dots 0)$
 impossibile perché
 altrimenti avremmo una c. lineare
 di una base di W con coeff. non tutti 0
 che dà $\underline{0}$

$$\alpha_{n-i} \bar{u}_{n-i} + \dots + \alpha_1 \bar{u}_1 = -\beta_1 \bar{e}_1 - \dots - \beta_i \bar{e}_i - \gamma_1 \bar{u}_1 - \dots - \gamma_{n-i} \bar{u}_{n-i}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \pi \\ \underline{0} \end{matrix}}_{\in \mathcal{U}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathcal{W}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{n-i} \bar{u}_{n-i} + \dots + \alpha_1 \bar{u}_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$$

$$\Rightarrow \alpha_{n-i} u_{n-i} + \dots + \alpha_1 u_1 = \delta_1 \bar{e}_1 + \dots + \delta_i \bar{e}_i$$

per opportuni $(\delta_1 \dots \delta_i) \neq (0 \dots 0)$

$$\Rightarrow \alpha_{n-i} \bar{u}_{n-i} + \dots + \alpha_1 \bar{u}_1 - \delta_1 \bar{e}_1 - \dots - \delta_i \bar{e}_i = \underline{0}$$

con coeff. non tutti nulli ma

$(\bar{u}_{n-i} \dots \bar{u}_1 \bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

Esercizio: Siano $U, W \leq \mathbb{R}^4$ con $\dim U = 3$
 $\dim W = 2$

Determinare min. e max delle dim.
di $U \cap W$ e/o $U + W$.

$$\text{Se } U, W \leq V \Rightarrow U + W \leq V$$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim U + W \leq \dim V$$

$$\dim U + W \leq \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim U + W \leq \min(\dim V, \dim U + \dim W)$$

$$3 \leq \dim U + W \leq 4$$

$$U \cap W \leq U$$

$$U \cap W \leq W$$

$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min\{\dim U, \dim W\}$$

$$\dim V \geq \dim U + W \geq \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$\dim U \cap W \geq \dim U + \dim W - \dim V.$$

$$\max\{0, \dim V + \dim U + \dim W\} \leq \dim U \cap W \leq \min\{\dim U, \dim W\}$$

$$1 = 3 + 2 - 4 \leq \dim U \cap W \leq 2$$